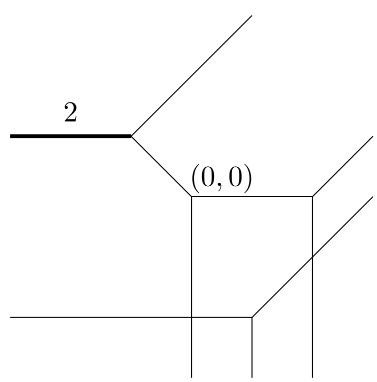
Tropska geometrija i potpuno pozitivne matrice

Ivica Martinjak, Zagreb

Tropska geometrija je novo područje istraživanja u matematici, koje se bavi vezama između algebarsko-geometrijskih i kombinatornih struktura. Primjerice, tropski analogon algebarske mnogostrukosti je određeni poliedar. Jedan od prvih značajnih rezultata tropske geometrije je određivanje broja planarnih krivulja danog stupnja i roda kroz određeni broj točaka, enumeriranjem pripadnih *tropskih krivulja* (G. Mikhalkin, 2005.). Tropski polupsten $\mathbb{T}$ definiramo na način $\mathbb{T} = (\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \oplus, \otimes)$ gdje su operacije zadane s $a \oplus b = \max(a, b)$, $a \otimes b = a + b$. Ovakva struktura prirodno se pojavljuje kao limit nekih klasičnih algebarskih struktura, primjerice skupa nenegativnih realnih brojeva s operacijama standardno zbrajanje i množenje. U tropskoj algebri baratamo tropskim polinomima, krivuljama, determinantama i ostalim objektima. Slika 1 prikazuje tropsku koniku i pravac, koji se također pojavljuju i u fizici. Do tropskih krivulja dolazimo i razmatranjem *ameba*. Planarnu amebu $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$ dobivamo logaritmiranjem korijena polinoma u dvije varijable, $Log : (\mathbb{C} \setminus 0)^2 \to \mathbb{R}^2$, $(u, z) \to (\log |u|, \log |z|)$, pri čemu kontrakcija daje tropsku krivulju. Tropska geometrija je u intenzivnom razvoju, s primjenama u enumerativnoj i analitičkoj geometriji, geometriji brojeva i drugdje.

Matrica dimenzija $m \times n$ je *potpuno pozitivna* ako je svaka njena minora pozitivna. Pridruživanjem acikličkog usmjerenog planarnog grafa matrici, možemo dokazivati njenu pozitivnost. Štoviše, takva mreža daje unificiranu interpretaciju poznatih kombinatornih matrica. Ovdje prikazujemo takve novije rezultate o potpuno pozitivnim matricama te razmatramo njihovu *tropikalizaciju*.



Slika 1: Dvije planarne tropske krivulje.