O veličini Diofantovih m-torki

Andrej Dujella, Zrinka Franušić

Diofant Aleksandrijski (3.st.) uočio je zanimljivo svojstvo skupa $\{\frac{1}{16}, \frac{33}{16}, \frac{17}{4}, \frac{105}{16}\}$. Naime, umnožak svaka dva elementa ovog skupa uvećan za 1 predstavlja kvadrat nekog racionalnog broja (npr. $\frac{1}{16} \cdot \frac{33}{16} + 1 = (\frac{17}{16})^2$). Njemu u čast skupove s ovim svojstvom nazivamo *Diofantove četvorke*. Smisleno ih je proučavati u svakom komutativnom prstenu R s jedinicom 1. Dakle, reći ćemo da je skup $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\} \subset R$ *Diofantova m-torka* u prstenu R ako vrijedi

- $a_i \neq 0$, $i = 1, \ldots, m$,
- $a_i \neq a_j$, $1 \leq i < j \leq m$,
- $a_i a_j + 1 = r_{ij}^2$, $r_{ij} \in R$, $1 \leq i < j \leq m$.

Jedno od pitanja koje se prirodno nameće jest možemo li naći gornju ogradu na veličinu ovih skupova, u ovisnosti o prstenu R. U prstenu cijelih brojeva možemo reći da odgovor na to pitanje gotovo znamo. Naime, poznato je da ne postoji cjelobrojna Diofantova šestorka te da postoji samo konačno mnogo cjelobrojnih Diofantovih petorki (Dujella 2004.). Broj mogućih petorki je još prevelik za efektivnu provjeru, usprkos nizu radova u posljednje vrijeme koji su bitno smanjili gornju ogradu na broj takvih skupova. Pitanje veličine racionalnih Diofantovih skupova je još otvoreno. Naime, Gibbs je 1999. pronašao prvu Diofantovu šestorku: $\left\{\frac{5}{36}, \frac{5}{4}, \frac{32}{9}, \frac{189}{4}, \frac{665}{1521}, \frac{3213}{676}\right\}$. Štoviše, nedavno je pokazano postoji beskonačno mnogo racionalnih Diofantovih šestorki (Dujella, Kazalicki, Mikić, Szikszai, 2015.), no nije poznat niti jedan primjer racionalne Diofantove sedmorke.

O ovom problemu u prstenu Gaussovih cijelih brojeva (odnosno u prstenima cijelih brojeva kvadratnih polja) zna se još i manje, što je očekivano jer su tehnički problemi bitno zahtjevniji. Do sada se u prstenu Gaussovih cijelih brojeva uspjelo pokazati da se neke familije Diofantovih trojki jedinstveno proširuju do četvorke (npr. Diofantova trojka $\{k-1, k+1, 4k\} \subset \mathbb{Z}[i]$ se jedinstveno proširuje do četvorke dodavanjem elementa $16k^3 - 4k$, Franušić, 2008.).