

IMO pripreme 2008, tulum 1. - planimetrija

- 1. zadatak:** Četverokut $ABCD$ upisan je u kružnicu radijusa r i postoji točka P na stranici \overline{CD} takva da vrijedi $|CB| = |BP| = |PA| = |AB|$.
- a) Dokaži da postoje točke A, B, C, D, P koje zadovoljavaju gornje uvjete.
- b) Dokaži da je $|PD| = r$.
- 2. zadatak:** Dan je konveksni četverokut $ABCD$ u kojem je $\angle BCD = \angle CDA$. Sime-trala kuta $\angle ABC$ siječe dužinu \overline{CD} u točki E . Dokaži da jednakost $|AB| = |AD| + |BC|$ vrijedi ako i samo ako je $\angle AEB = 90^\circ$.
- 3. zadatak:** Zadan je šiljastokutni trokut ABC . Neka su P i Q dirališta tangenti iz A na kružnicu promjera BC . Neka je H presjek visine CD trokuta ABC i pravca PQ . Dokaži da je H ortocentar trokuta ABC .
- 4. zadatak:** Točke O i I su središta opisane i upisane kružnice trokuta ABC . Trokutu pripisana kružnica ω_a dodiruje produžetke stranica \overline{AB} i \overline{AC} u točkama K i M redom, a stranicu \overline{BC} u točki N . Poznato je da polovište P segmenta \overline{KM} leži na opisanoj kružnici trokuta ABC . Dokaži da su točke O, N i I kolinearne.

IMO pripreme 2008., tulum 2. - kombinatorika

- 1. zadatak:** Na jednome natjecanju, 8 sudaca ocjenjuje natjecatelje sa prolaz ili pad. Poznato je da za svaka dva natjecatelja vrijedi da su ih dva suca obojicu ocijenila sa prolaz, dva su suca prvog natjecatelja ocijenili sa prolaz a drugog sa pad, dva su suca prvog natjecatelja ocijenila sa pad a drugog sa prolaz, te su dva suca obojicu natjecatelja ocijenila sa pad. Koji je najveći mogući broj natjecatelja?
- 2. zadatak:** U jednoj novoosnovanoj državi munjevitom brzinom sagrađeno je 2000 zračnih luka, te su od strane tamošnjih tajkuna osnovane 2 zračne kompanije koje naizmjenice uvode nove letove između luka (u državi još uvijek kompetitivno tržište nije u punoj snazi, tako da između svaka dva grada smije postojati najviše jedan let). Politički moćnici žele ostvariti da je moguće iz bilo koje zračne luke doći do bilo koje druge, čak i ako se proizvoljna zračna luka zatvori. Kompanija koja uvođenjem svoga leta, ostvari ovaj cilj proglašava se, naravno, gubitnikom. Koja kompanija ima pobjedničku strategiju?
- 3. zadatak:** Neka je 3D-križ tijelo koje čini jedna središnja kocka, te njih 6 sa kojima dijeli stranu. Može li se prostor prekriti 3D-križevima, bez da ikoja imaju zajedničke unutrašnje točke?
- 4. zadatak:** Svaki kvadratić šahovske ploče 100×100 obojan je u jednu od četiri boje tako da se u svakom retku i stupcu nalaze točno 25 kvadratića određene boje. Dokažite da je moguće odabrati dva stupca i dva retka tako da su četiri kvadratića u kojima se sijeku obojani u različite boje.

SAMO ZA GORANA:

- 5. zadatak:** Neki vrhovi kvadratića šahovske ploče $n \times n$ obojani su tako da svaki kvadrat $k \times k$ ima barem jednu obojanu točku na svome rubu. Ako $l(n)$ označava minimalni broj obojanih točaka za postići gornje svojstvo, dokažite da je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{l(n)}{n^2} = \frac{2}{7}$$

IMO pripreme 2008., tulum 3. - diofantske jednačbe

1. zadatak: Dokaži da jednačba

$$x^2 + y^2 + z^2 + 3(x + y + z) + 5 = 0$$

nema rješenja u skupu racionalnih brojeva.

2. zadatak: Odredi sve prirodne brojeve x, y, z, t takve da je

$$1 + 5^x = 2^y + 2^z 5^t.$$

3. zadatak: Neka su x, y, p, n i k prirodni brojevi za koje vrijedi

$$x^n + y^n = p^k.$$

Ako je $n > 1$ neparan broj i $p > 2$ prost broj, onda je n potencija broja p . Dokaži.

4. zadatak: Dokaži da jednačba

$$x^2 y^2 = z^2 (z^2 - x^2 - y^2)$$

nema rješenja u skupu prirodnih brojeva.

IMO pripreme 2008, tulum 4. - nejednakosti

1. zadatak:

2. zadatak:

3. zadatak:

4. zadatak:

IMO pripreme 2008, tulum 5. - geometrijske nejednakosti

- 1. zadatak:** Dijagonale tetivnog četverokuta $ABCD$ sijeku se u točki O . Dokaži da vrijedi

$$\frac{|AB|}{|CD|} + \frac{|CD|}{|AB|} + \frac{|BC|}{|AD|} + \frac{|AD|}{|BC|} \leq \frac{|OA|}{|OC|} + \frac{|OC|}{|OA|} + \frac{|OB|}{|OD|} + \frac{|OD|}{|OB|}.$$

- 2. zadatak:** Neka je ABC trokut čija upisana kružnica ima središte I i polumjer r . Dokaži da je

$$|AI| + |BI| + |CI| \geq 6r.$$

- 3. zadatak:** Neka je ABC trokut, a D, E, F točke na njegovim stranama $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$ redom, takve da je

$$\frac{|BD|}{|DC|} \leq \frac{|BF|}{|FA|} \leq 1 \quad \text{i} \quad \frac{|AE|}{|EC|} \leq \frac{|AF|}{|FB|}.$$

Dokaži da je $P(DEF) \leq \frac{1}{4}P(ABC)$. Kada se postiže jednakost?

- 4. zadatak:** Neka je ABC trokut i $A'B'C'$ njegov ortotrokut (vrhovi su mu nožišta visina polaznog trokuta). Neka su R i r polumjeri opisane odnosno upisane kružnice trokuta ABC , a p polumjer upisane kružnice trokuta $A'B'C'$.

Dokaži da je $\frac{p}{R} \leq 1 - \frac{1}{3} \left(1 + \frac{r}{R}\right)^2$.

IMO pripreme 2008, tulum 6. - teorija brojeva

- 1. zadatak:** Neka je d prirodan broj i $S = \{m^2 + dn^2 \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$. Neka su $p, q \in S$, takvi da je p prost, i $r = \frac{q}{p}$ cijeli broj. Dokaži da je $r \in S$.
- 2. zadatak:** Točka $A(x, y)$ se zove *cjelobrojna* ako su x i y cijeli brojevi. Cjelobrojna točka A je *nevidljiva* ako se na segmentu \overline{OA} nalazi još neka cjelobrojna točka (O je ishodište koordinatnog sustava). Dokažite da za svaki prirodan broj n , postoji kvadrat stranice n , u čijoj su unutrašnjosti sve točke nevidljive.
- 3. zadatak:** Nađi sve trokute ABC čije sve stranice imaju cjelobrojne duljine, takve da je \overline{AC} iste duljine kao i simetrala kuta kod vrha A , a opseg iznosi $10p$, gdje je p prost broj.
- 4. zadatak:** Dokaži da za svaki cijeli broj $a \geq 4$, postoji beskonačno mnogo kvadratno slobodnih prirodnih brojeva n koji dijele $a^n - 1$.

SAMO ZA MELKIORA:

- 5. zadatak:** Postoje li u parovima relativno prosti prirodni brojevi $a, b, c > 1$ takvi da $b \mid 2^a + 1$, $c \mid 2^b + 1$, $a \mid 2^c + 1$?
- 6. zadatak:** Neka je $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ polinom s cjelobrojnim koeficijentima, te neka su a_2, a_3, \dots, a_n djeljivi sa svim prostim faktorima nekog prirodnog broja m , a a_1 relativno prost sa m . Dokaži da za svaki prirodan broj k postoji prirodan broj c takav da $m^k \mid f(c)$.

IMO pripreme 2008, tulum 7. - nizovi

1. zadatak: Neka je $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aritmetički niz prirodnih brojeva. Za svaki n , neka je p_n najveći prosti faktor broja a_n . Dokaži da je niz $(\frac{a_n}{p_n})_{n \in \mathbb{N}}$ neograničen.

2. zadatak: Nizovi (x_n) i (y_n) zadani su rekursivno:

$$x_1 = 1, \quad y_1 = 2, \quad x_{n+1} = 22y_n - 15x_n, \quad y_{n+1} = 17y_n - 12x_n.$$

- a) Dokaži da su svi x_n, y_n različiti od 0.
- b) Dokaži da svaki od ta dva niza sadrži beskonačno mnogo pozitivnih i beskonačno mnogo negativnih članova.
- c) Odredi koji su članovi niza (x_n) djeljivi sa 7 i dokaži da nijedan član niza (y_n) nije djeljiv sa 7.

3. zadatak: Dokaži da za svaki $n, n \geq 3$ postoji n prirodnih brojeva a_1, a_2, \dots, a_n koji su uzastopni članovi aritmetičkog niza i n prirodnih brojeva b_1, b_2, \dots, b_n koji su uzastopni članovi geometrijskog niza, takvi da je

$$b_1 < a_1 < b_2 < a_2 < \dots < b_n < a_n.$$

Navedi primjer takvih nizova za $n = 5$ (ili veći).

4. zadatak: Odredi najveći $x_0 \in \mathbb{R}$ za koji postoji niz $x_0, x_1, \dots, x_{2007}$ pozitivnih realnih brojeva za koje vrijedi:

a) $x_0 = x_{2007}$

b) $x_{k-1} + \frac{2}{x_{k-1}} = 2x_k + \frac{1}{x_k}$, za sve $k = 1, 2, \dots, 2007$.

IMO pripreme 2008, tulum 8. - inverzija

- 1. zadatak:** Neka je ABC trokut, D točka na \overline{BC} . Kružnice k_1 i k_2 diraju opisanu kružnicu trokuta ABC i pravce BC i AD . Kružnica k_1 dira dužinu \overline{BD} , a kružnica k_2 dužinu \overline{DC} .

Ako obje kružnice diraju segment \overline{AD} u istoj točki, dokaži da je AD simetrala kuta $\angle A$.

- 2. zadatak:** Dane su dvije koncentrične kružnice k, k' sa središtem O i polumjerima R i R' ($R < R'$). Točke $A \in k$ i $B \in k'$ su kolinearne s O i sa suprotnih strana točke O . Točke $E \in k, F \in k'$ su kolinearne s O i s iste strane točke O . (pravci AB i EF su različiti.) Dokaži da kroz istu točku prolaze: opisana kružnica trokuta OAE , opisana kružnica trokuta OBF , kružnica nad promjerom \overline{AB} i kružnica nad promjerom \overline{EF} .

- 3. zadatak:** Neka je ABC raznostranični trokut, čija upisana kružnica dodiruje stranice u točkama A_1, B_1, C_1 . Neka je H_1 ortocentar trokuta $A_1B_1C_1$. Dokaži da H leži na spojnici središta opisane i upisane kružnice trokuta ABC .

- 4. zadatak:** Neka je ABC trokut i X njegova unutarnja točka, a Y sjecište AX i BC . Neka su P, Q, R, S redom nožišta okomica iz Y na CA, CX, BX, BA .

Odredi nužan i dovoljan uvjet koji treba zadovoljiti točka X da bi $PQRS$ bio tetivni četverokut.

IMO pripreme 2008, tulum 9. - LK zadaci

- 1. zadatak:** Neka je k prirodan broj. Odredite broj nesukladnih trokuta kojima su vrhovi u vrhovima zadanog pravilnog $6k$ -terokuta.
- 2. zadatak:** Odredi najmanji prirodni broj n , $n \geq 4$, za koji se između n različitih prirodnih brojeva mogu izabrati 4 , a , b , c i d takvi da je $a + b - c - d$ djeljivo sa 20 .
- 3. zadatak:** Nađite sve konačne nizove (x_0, x_1, \dots, x_n) takve da je za svaki j , $0 \leq j \leq n$, x_j broj pojavljivanja broja j u tom nizu.
- 4. zadatak:** Neka je $n \geq 4$ zadani prirodan broj. Zadan je skup $S = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ od n točaka u ravnini takvih da nikoje tri nisu kolinearne i nikoje četiri konciklične; neka je a_t , $1 \leq t \leq n$ broj kružnica $P_i P_j P_k$ koji sadrže P_t u svojoj unutrašnjosti, te neka je

$$m(S) = a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

Dokaži da postoji prirodan broj $f(n)$, koji ovisi samo o n , takav da su točke od S vrhovi konveksnog mnogokuta ako i samo ako je $m(S) = f(n)$.

IMO pripreme 2008, tulum 10. - trokut, četverokut, kružnica

- 1. zadatak:** Neka je $ABCD$ tangencijalni četverokut čiji su svi unutrašnji i vanjski kutovi barem 60° . Dokaži da je

$$\frac{1}{3}|AB^3 - AD^3| \leq |BC^3 - CD^3| \leq 3|AB^3 - AD^3|.$$

Kada vrijedi jednakost?

- 2. zadatak:** Dan je trokut ABC s težištem G i središtem opisane kružnice O . Sime-trale dužina \overline{AG} , \overline{BG} , \overline{CG} tvore trokut $A_1B_1C_1$. Dokaži da je točka O težište trokuta $A_1B_1C_1$.

- 3. zadatak:** U trokutu ABC povučena je težišnica \overline{AM} i visine $\overline{BB_1}$, $\overline{CC_1}$. Pravac d prolazi točkom A , okomit je na AM i siječe BB_1 i CC_1 u točkama E , F redom. Neka je k kružnica kroz E , F i M , te neka su k_1 , k_2 kružnice koje dodiruju luk kružnice k koji ne sadrži točku M i dužinu \overline{EF} . Ako su P i Q sjecišta kružnica k_1 , k_2 , dokaži da su točke P , Q i M kolinearne.

- 4. zadatak:** Neka je ABC šiljastokutni trokut i H njegov ortocentar. Vanjska sime-trala kuta $\angle BHC$ siječe stranice \overline{AB} i \overline{AC} u točkama D i E redom. Un-utrašnja simetrala kuta $\angle BAC$ siječe opisanu kružnicu trokuta ADE ponovno u točki K . Dokaži da pravac HK prolazi polovištem stranice \overline{BC} .

IMO pripreme 2008, tulum 11. - algebra

- 1. zadatak:** Neka su a_1, a_2, \dots, a_n različiti cijeli brojevi. Dokaži da se polinom

$$(x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n) - 1$$

ne može prikazati kao umnožak dvaju nekonstantnih polinoma s cjelobrojnim koeficijentima.

- 2. zadatak:** Odredi sve funkcije $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ takve da vrijedi

$$f(x)f(y) = 2f(x + yf(x)) \quad \forall x, y > 0.$$

- 3. zadatak:** Nađi sve $a \in \mathbb{R}$ za koje postoji nekonstantna funkcija $f : \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, takva da za svaki par $(x, y) \in \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$ vrijedi:

$$a + f(x + y - xy) \leq f(x) + f(y).$$

- 4. zadatak:** Madridski hostel "Olimpijada" ima $n + 3$ soba označenih brojevima $0, 1, 2, \dots, n + 1, n + 2$ (za neki $n \in \mathbb{N}$). U rano jutro uoči prvog dana natjecanja glavni koordinator smislio je polinom n -tog stupnja s realnim koeficijentima i na vrata svake sobe napisao vrijednost tog polinoma za argument jednak broju dotične sobe. Na k -toj sobi za $k \in \{0, 1, 2, \dots, n, n + 1\}$ napisao je broj 2^k , a na sobu $n + 2$ broj $2^{n+2} - n - 3$.

- a) Dokaži da je glavni koordinator pogriješio u računu.
b) Pokaži da je moguće da je napravio samo jednu grešku u računu. Pokaži da je uz pretpostavku da je napravio samo jednu grešku tu grešku moguće ispraviti, tj. odrediti na kojim je vratima pogrešan broj te koji bi broj tamo trebao biti.

Hrvatska matematička olimpijada 2008.

prvi dan, 3. 7. 2008.

- 1. zadatak:** Odredi sve prirodne brojeve n za koje postoje pozitivni racionalni brojevi a_1, a_2, \dots, a_k ($k \geq 2$) takvi da je

$$a_1 + a_2 + \dots + a_k = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_k = n.$$

- 2. zadatak:** Neka je M broj cjelobrojnih rješenja jednadžbe

$$x^2 - y^2 = z^3 - t^3$$

sa svojstvom da je $0 \leq x, y, z, t \leq 10^6$, a N broj cjelobrojnih rješenja jednadžbe

$$x^2 - y^2 = z^3 - t^3 + 1$$

s istim svojstvom. Dokaži da je $M > N$.

- 3. zadatak:** Kružnice k_1 i k_2 sa središtima O_1, O_2 diraju se izvana u D , i obje diraju kružnicu k iznutra u točkama E i F redom. Pravac t je zajednička tangenta kružnica k_1 i k_2 u točki D , a \overline{AB} promjer kružnice k okomit na t , tako da su A, E i O_1 s iste strane od t . Dokaži da pravci AO_1, BO_2, EF i t prolaze istom točkom.

Hrvatska matematička olimpijada 2008.

drugi dan, 4. 7. 2008.

4. zadatak: Neka je ABC trokut čija je pripisana kružnica nasuprot vrha A sukladna opisanoj kružnici. Neka pripisana kružnica dodiruje stranicu \overline{BC} i pravce AC i AB u točkama K , L , M . Dokaži da je središte opisane kružnice trokuta ABC ortocentar trokuta KLM .

5. zadatak: Odredi sva nenegativna rješenja (x, y, z, w) jednadžbe

$$4^x + 4^y + 4^z = w^2.$$

6. zadatak: *Riječ* je svaki konačan niz simbola a i b . Broj simbola u riječi zovemo *duljinom* riječi. Kažemo da je riječ *neperiodična* ako ne sadrži podriječ oblika $cccccc$ za neku riječ c . Ako je $f(n)$ ukupan broj neperiodičnih riječi duljine n , dokaži da je $f(n) > \left(\frac{3}{2}\right)^n$.