

MEMO pripreme 2008, TMOK - algebra

1. Napiši sljedeće nejednakosti

- (a) nejednakost (po mogućnosti težinsku) među sredinama reda p ;
- (b) nejednakost Cauchyja, t.j. Cauchy-Schwarza (ako tako više volite).

2. Napiši i dokaži Schurovu nejednakost.

3. Izvedi Čebiševljevu nejednakost pomoću nejednakosti o monotonom preuređenju vektora.

4. (a) Napiši Muirhedovu nejednakost

- (b) Pomoću Muirhedove nejednakosti dokaži, da za sve pozitivne brojeve a, b, c za koje je $abc = 1$ vrijedi

$$\frac{1}{a^3 + b^3 + abc} + \frac{1}{b^3 + c^3 + abc} + \frac{1}{c^3 + a^3 + abc} \leq 1.$$

- (c) Dokaži ili općenitu Muirhedovu nejednakost ili barem njezin specijalan slučaj koji koristiš u zadatku b).

5. Napiši i izvedi binomni poučak.

6. Pomoću binomnog poučka izvedi Bernoullijevu nejednakost $(1 + x)^n > 1 + nx$, za $x \geq 0$ i $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$.

7. Izračunaj zbroj

- (a) prvih n prirodnih brojeva
- (b) prvih n neparnih prirodnih brojeva
- (c) prvih n kvadrata prirodnih brojeva

8. Napisati i izvesti formulu za zbroj

$$aq^i + aq^{i+1} + aq^{i+2} + \dots + aq^n.$$

9. Koji je od sljedećih redova konvergentan (t.j. za koji od zbrojeva postoji konstanta takva da, koliko god članova u tom zbroja uzmemo, ukupni zbroj će biti manji od te konstante)

$$1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n + \dots, \quad |q| < 1$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$$

10. Nađi nultočke polinoma $P(x) = x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 4$.

11. Nađi sve polinome s realnim koeficijentima takve da je

$$(x - 1) \cdot P(x + 1) = (x + 2) \cdot P(x).$$

12. Neka je P polinom stupnja n i neka vrijedi $p(k) = \frac{k}{k+1}$ za $k = 0, \dots, n$. Koliko je $P(n+1)$?

13. Nađi sve polinome koji imaju samo realne nultočke, a svi koeficijenti su im jednaki 1 ili -1 .

14. Neka su a_1, \dots, a_n međusobno različiti prirodni brojevi. Dokaži da se polinom

$$P(x) = (x - a_1) \dots (x - a_n) - 1$$

ne može rastaviti kao umnožak dva nekonstantna polinoma s cjelobrojnim koeficijentima !

15. Dokaži Eisensteinov kriterij ireducibilnosti:

Neka je $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ polinom s cjelobrojnim koeficijentima. Neka je p prost broj takav da $p \nmid a_n$, $p \mid a_{n-1}$, $p \mid a_{n-2}$, \dots , $p \mid a_0$, $p^2 \nmid a_0$. Tada se f ne može prikazati kao produkt dva nekonstantna polinoma s koeficijentima iz \mathbb{Q} (kraće kažemo da je ireducibilan nad \mathbb{Q}).

16. Nađi sve parove prirodnih brojeva (m, n) za koje je polinom

$$P(x) = 1 + x^n + x^{2n} + \dots + x^{mn}$$

djeljiv s polinomom $Q(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^m$.

17. Dokažite da polinom $1 + x/1 + x^2/2! + \dots + x^n/n!$ nema višestrukih nultočki. (Naputak: koristi derivaciju polinoma).

18. Neka je P polinom stupnja n takav da je $P(k) \in \mathbb{Z}$ za nekih n uzastopnih cijelih vrijednosti od k . Dokažite da $P(k)$ poprima cjelobrojne vrijednosti za sve $k \in \mathbb{Z}$. (Naputak: koristi Lagrangeov interpolacijski polinom).


19. Nađi sve funkcije $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ takve da je $f(x + y) = f(x) + f(y)$.

MEMO pripreme 2008, TMOK - kombinatorika

1. Dokaži i kombinatorno interpretiraj identitet ($n \in \mathbb{N}$):

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}.$$

2. Koliko se riječi može sastaviti od slova $M, A, T, E, M, A, T, I, K, A$?
3. Koliko parova disjunktivnih podskupova ima skup $\mathbb{N}_n = \{1, 2, \dots, n\}$?
4. Koliko ima puteva cjelobrojne mreže od točke $(0, 0)$ do točke $(19, 17)$ koji ne prolaze točkom $(7, 13)$? Dozvoljeno je kretanje samo prema "gore" i "desno".
5. Koliko ima pravokutnika na šahovskoj ploči 8×8 ?
6. Može li se ploča 10×10 popločati pločicama 1×4 ?
7. Je li moguće ispuniti ploču 8×8 s 21 pločicom 1×3 i jednom 1×1 ? Ako jest, na kojem se polju može nalaziti pločica 1×1 ?
8. Dokaži da se svaka tabla $2^n \times 2^n$ bez jednog kvadratića (1×1) može popločati

pločicama oblika  .

9. U nekom razredu ima 30 učenika. Njih 10 voli matematiku, 14 fiziku, a 13 kemiju. Petoro ih voli i matematiku i fiziku, sedam fiziku i kemiju, a četiri matematiku i kemiju, dok tri učenika vole sva tri predmeta. Koliko učenika ne voli ni jedan od ta tri predmeta?
10. Stranice i dijagonale pravilnog šesterokuta obojane su plavom ili žutom bojom. Dokaži da postoji trokut čije su sve tri stranice obojane istom bojom. Dokaži da tvrdnja ne vrijedi ako šesterokut zamijenimo peterokutom. Možemo li tvrditi da (u šesterokutu) postoje dva jednoboja trokuta?
11. Dokaži da u svakoj skupini ljudi postoje dvije osobe s istim brojem poznanika u toj skupini (poznanstvo je uzajamno).

12. Neki od sudionika upravo održanog kongresa matematičara su prijatelji. Pokazalo se da bilo koja dva sudionika koja imaju jednak broj prijatelja nemaju ni jednog zajedničkog prijatelja. Dokaži da barem jedan od sudionika ima samo jednog prijatelja.
13. U skupini od 10 osoba među bilo koje 3 postoje barem dva para poznanstava. Dokaži da među njima postoje 4 osobe koje se sve međusobno poznaju.
Vrijedi li tvrdnja ako broj 10 zamijenimo sa 9 ?
14. Oko okruglog stola sjelo je 2006 miševa i 1 lav. Čarobnjak potom mijenja njihovo stanje (lavlje u mišje i mišje u lavlje) za neka tri susjeda na stolu. Može li postići da na kraju oko stola sjede samo lavovi ?
15. Zadani su parovi prirodnih brojeva kao (a, b) i (c, d) . U svakom koraku iz para (m, n) dobivamo novi par kao $(m - n, n)$ ili $(m + n, n)$ ili (n, m) . Nađi mužne i dovoljne uvjete da iz para (a, b) višestrukim ponavljanjem opisanog postupka možemo dobiti par (c, d) .
16. Dan je 10×8 pravokutna parcela zemljišta s 80 jediničnih parcela. Neke su jednične parcele zarasle u korov. Ukoliko neka jedinična parcela ima dvije susjedne koje su zarasle u korov, onda i ona zaraste u korov. Koliki je najmanji broj jediničnih parcela zaraslih u korov takvih da postoji polazno stanje nakon kojeg se višekratnom primjenom gornjeg pravila zarastanja u korov može dogoditi da cijela parcela zaraste u korov ?
17. U ravnini je dano 10 pravaca, te 60 točaka koje ne leže na danim pravcima. Dokaži da se bar dvije od ovih 60 točaka nalaze s iste strane svakog od 10 pravaca, tj. u "istom području".
18. Šezdeset i četiri kuglice razmještene su u nekoliko hrpa. U svakom koraku dozvoljeno je premjestiti s veće hrpe na manju točno onoliko kuglica koliko se nalazi u manjoj hrpi. Dokaži da je moguće sve kuglice premjestiti na jednu hrpu.
19. n djece treba probati 10 vrsta bombona tako da budu zadovoljena ova tri uvjeta:
- a) Svako dijete proba točno 5 vrsta bombona.
 - b) Svaku vrstu bombona proba jednak broj djece.
 - c) Za dvoje djece promatramo broj vrsta bombona koje je probalo i jedno i drugo dijete. Za sve parove djece ti su brojevi jednaki.
- Odredi sve n za koje je to moguće provesti.

MEMO pripreme 2008, TMOK - geometrija

1. Iskaži teorem o simetrali kuta.
2. Napiši nekoliko karakterizacija tetivnog četverokuta.
Napiši nekoliko karakterizacija tangencijalnog četverokuta.
3. Iskaži teorem o radikalnom središtu.
4. Iskaži Hamiltonov teorem o radijus-vektoru ortocentra.
(Krije se u formuli za ortocentar standardnog trokuta u kompleksnim koordinatama.)
5. Napiši nekoliko formula za površinu trokuta sa stranicama a, b, c , kutevima α, β, γ , polumjerima upisane i opisane kružnice r i R .
6. Nacrtaj trokut, njegovu upisanu kružnicu i jednu pripisanu kružnicu. Izrazi udaljenosti njihovih dirališta od susjednih vrhova pomoću duljina stranica trokuta. Odredi polumjer pripisane kružnice.
7. Nacrtaj trokut i njegove visine, te spoji nožišta visina. Odredi kuteve koje visine trokuta zatvaraju međusobno i sa stranicama nožišnog trokuta (pomoću α, β, γ).
8. Kružnica $k(S, r)$ leži unutar kružnice $k(O, R)$. Postoji li trokut kojem je prva kružnica upisana, a druga opisana?
9. Neka je ABC trokut, k njegova opisana kružnica i A_1, B_1, C_1 točke u kojima simetrale kutova sijeku opisanu kružnicu. Dokaži da kružnice $k(A_1, B)$, $k(B_1, C)$ i $k(C_1, A)$ prolaze istom točkom. Koja je to točka?
10. Iskaži Ptolomejevu nejednakost.
11. Neka je ABC trokut i P točka unutar njega, te neka su X, Y, Z nožišta okomica iz P na BC, CA, AB .
Dokaži da vrijedi $|PA| \cdot |BC| \geq |AB| \cdot |PY| + |AC| \cdot |PZ|$.
Dokaži Erdős-Mordellovu nejednakost: $|PA| + |PB| + |PC| \geq 2(|PX| + |PY| + |PZ|)$.
12. Pokaži da je skup svih točaka M unutar četverokuta $ABCD$ za koje vrijedi $P(ABM) + P(CDM) = P(BCM) + P(DAM)$ dio pravca.
Dokaži da u tangencijalnom četverokutu središte upisane kružnice leži na spojnici polovišta dijagonala.

13. Dokaži da su dužine \overline{AB} i \overline{CD} okomite ako i samo ako vrijedi $|AC|^2 - |AD|^2 = |BC|^2 - |BD|^2$.

Dokaži Carnotov teorem: Neka su ABC i PQR trokuti. Okomice iz P, Q, R redom na $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$ sijeku u jednoj točki ako i samo ako vrijedi

$$|AQ|^2 - |AR|^2 + |BR|^2 - |BP|^2 + |CP|^2 - |CQ|^2 = 0.$$

Iskaži jednu posljedicu gornje tvrdnje.

14. Navedi 9 točaka koje leže na Feuerbachovoj kružnici trokuta ABC .

Uz oznake na slici, a uz pomoć homotetije sa središtem T i koeficijentom $-\frac{1}{2}$,

... odredi što je točka O trokutu $A_1B_1C_1$

... dokaži da je $|AH| = 2|OA_1|$

... dokaži da su H, O i T kolinearne

... odredi kamo spomenuta homotetija preslikava opisanu kružnicu trokuta ABC

... dokaži da na toj kružnici leži i točka A_2

... dokaži da na toj kružnici leži i točka A_3 (polovište od \overline{AH})

Iskaži tvrdnju o Eulerovom pravcu.

15. Neka je ABC trokut, P sjecište simetrale stranice \overline{BC} i simetrale kuta $\angle CAB$. Neka su M i N nožišta okomica iz P na AB i AC , te neka je X sjecište pravaca MN i BC . Odredi omjer $|BX|/|XC|$.

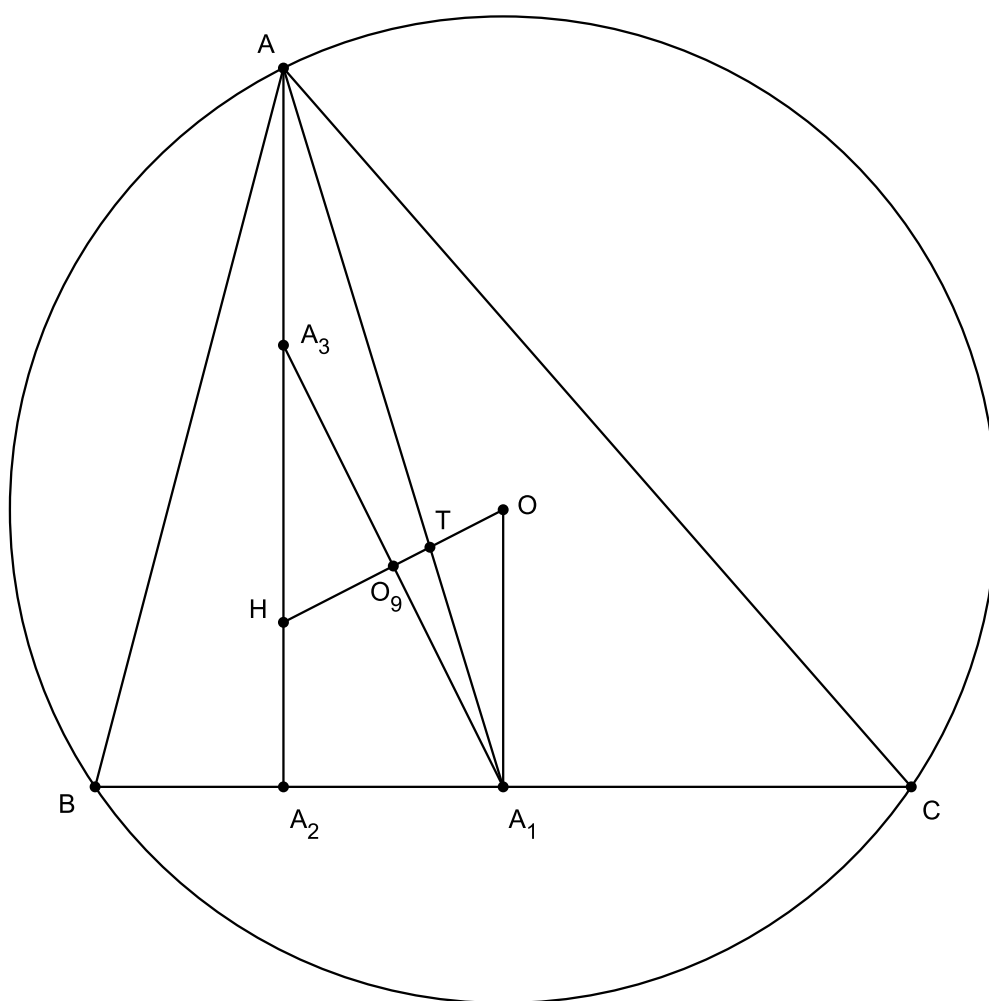
16. U trokutu ABC vrijedi $|AB| = |AC|$. Simetrala kuta $\angle ABC$ siječe \overline{AC} u D , i pritom vrijedi $|BC| = |AD| + |BD|$. Odredi kuteve trokuta.

17. Duljine stranica trokuta ABC odnose se kao $1 : \sqrt{2} : \sqrt{3}$. Dokaži da su dvije težišnice tog trokuta međusobno okomite.

18. Dan je trokut ABC s ortocentrom H i središtem opisane kružnice O . Ako vrijedi $|AH| = |AO|$, dokaži da je $\angle BAC = 60^\circ$.

19. Neka su A_1, B_1, C_1 polovišta stranica trokuta ABC , a R i r polumjeri njegove opisane i upisane kružnice, te O središte opisane kružnice i H ortocentar. Dokaži da je $|OA_1| + |OB_1| + |OC_1| = R + r$, $|AH| + |BH| + |CH| = 2(R + r)$. Uputa: primijeni Ptolomejev teorem na tetivne četverokute AB_1OC_1 i sl. [Ovo je još jedan Carnotov teorem]

20. Neka je ABC trokut, I središte njegove upisane kružnice, D, E i F dirališta upisane kružnice. Neka su Y i Z sjecišta pravaca DE i DF s paralelom sa stranicom BC kroz vrh A , te neka su E' i F' polovišta dužina \overline{DZ} i \overline{DY} . Dokaži da točke A, E, F, I, E' i F' leže na istoj kružnici.



MEMO pripreme 2008, TMOK - teorija brojeva

1. Rastavi brojeve 2008 i $33!$ na proste faktore.
2. Dokaži da broj $20^7 + 20^2 + 1$ nije prost.
Dokaži da broj $n^4 + 4^n$ ne može biti prost (za $n \in \mathbb{N}$).
3. Iskaži Dirichletov teorem (o prostim brojevima u aritmetičkom nizu).
4. Euklidovim algoritmom odredi $M(936, 338)$.
Riješi diofantsku jednadžbu $936x + 338y = 52$.
5. Ako je $ak + bl = 1$, za neke $k, l \in \mathbb{Z}$ onda su očito a i b relativno prosti.
Iskaži, ako vrijedi, obrat ove tvrdnje i njeno poopćenje za slučaj $M(a, b) = d > 1$.
6. Broj n daje ostatak 2 pri dijeljenju s 3, ostatak 3 pri dijeljenju s 4 i ostatak 2 pri dijeljenju s 5. Koliki je n ?
Iskaži kineski teorem o ostacima.
7. Koji se prirodni brojevi mogu prikazati kao suma
... dvaju kvadrata
... triju kvadrata
... četiriju kvadrata ?
8. Ako je $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$ kanonski rastav broja n na proste faktore, koliki je
... broj djelitelja broja n ?
... zbroj djelitelja broja n ?
... broj brojeva iz skupa $\{1, 2, \dots, n\}$ koji su relativno prosti sa n ?
Što su to multiplikativne funkcije ?
9. Riješi jednadžbe $\varphi(m) = 12$, $\varphi(m) = \frac{m}{2}$.
10. Iskaži mali Fermatov teorem.
Iskaži Eulerov teorem (onaj čiji je specijalni slučaj mali Fermatov teorem).
11. Odredi zadnje dvije znamenke broja 4444^{4444} .
12. Ako je p prost i ako je $a^p \equiv b^p \pmod{p}$ onda je $a^p \equiv b^p \pmod{p^2}$. Dokaži.
13. Iskaži veliki Fermatov teorem.

14. Što su Pitagorine trojke?
Ili... napiši sva rješenja jednačbe $x^2 + y^2 = z^2$ u skupu prirodnih brojeva.
Ispiši sve Pitagorine trojke koje sadrže broj 39.
15. Riješi jednačbu $x^2 - 3y^2 = 1$ u skupu cijelih brojeva.
16. Dokaži da jednačba $7x^2(x + 1) = y^2 - 7$ nema rješenja u \mathbb{Z} .
17. Dokaži da jednačba $x^2 + y^2 = 3(z^2 + w^2)$ nema cjelobrojnih rješenja.
18. Ako 9 dijeli sumu kubova triju prirodnih brojeva, onda je barem jedan od tih brojeva djeljiv s 3. Dokaži.
19. Za koje proste brojeve p kongruencija $x^2 \equiv -1 \pmod{p}$ ima rješenje?
20. Dokaži da postoji beskonačno mnogo prostih brojeva oblika $4k + 1$.
21. Dokaži da je broj $\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)^n$ prirodan, za sve $n \in \mathbb{N}$.
22. Izračunaj $\varphi(125)$.
Nađi najmanji prirodan broj k takav da je $2^k - 1$ djeljivo s 125.
23. Iz skupa $\{1, 2, \dots, 2n\}$ je odabrano $n + 1$ brojeva. Dokaži da među njima postoje dva različita broja od kojih je jedan višekratnik drugog.
24. Koristeći kineski teorem o ostacima dokaži da postoji 2008 uzastopnih prirodnih brojeva od kojih je svaki djeljiv kubom nekog prirodnog broja većeg od 1.
25. Dokaži da $1989 \mid n^{n^n} - n^{n^n}$.
Uputa: iskaži Eulerov teorem za 17, 13, 9, 4 i 16.