

MEMO 2008, pripremno ekipno natjecanje br.1

20. lipnja 2008.

- 1. zadatak:** Neka je $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = \{1, 2, \dots, n\}$. Kolika je najveća moguća vrijednost izraza

$$x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_{n-1}x_n + x_nx_1 ?$$

- 2. zadatak:** Skupina od n uvažanih društvenih djelatnika sudjeluje na simpoziju o ulozi matematike na ekološku svijest i moral ljudi općenito. Prvog dana simpozija za njih su priređeni svečani ručak i večera u domu "A.G. Matoš" na kojem su sjedili oko okruglog stola u različitom poretku.

(a) Dokažite da postoji beskonačno mnogo brojeva n za koje postoje dva sudionika simpozija takva da je broj ljudi koji su sjedili između njih za ručkom i večerom bio isti.

(b) Dokažite da postoji beskonačno mnogo brojeva n za koje gornja tvrdnja ne vrijedi.

- 3. zadatak:** Iz točke T povučene su tangente na polukružnicu k koje ju diraju u točkama A i B . Neka je H nožište okomice iz točke T na promjer polukružnice. Dokažite da je TH simetrala kuta $\angle AHB$.

- 4. zadatak:** Nađite sve međusobno različite prirodne brojeve k , l i m takve da je

$$\frac{klm - 1}{(k - 1)(l - 1)(m - 1)}$$

prirodan broj.

Vrijeme pisanja je 5 sati.

Svaki zadatak vrijedi 8 bodova.

MEMO 2008, pripremno ekipno natjecanje br.2

26. lipnja 2008.

1. zadatak: Neka je a realan broj takav da je $|a| > 1$. Riješite sustav jednadžbi

$$x_i^2 = ax_{i+1} + 1, \quad i = 1, \dots, 2008 \text{ (modulo 2008)}.$$

2. zadatak: Ploča 2008×2008 se sastoji od 2008^2 jediničnih kvadrata. Na jednom od tih jediničnih kvadrata nalazi se figura. *Potez* se sastoji od micanja figure iz nekog jediničnog kvadrata u k -tom stupcu u neki jedinični kvadrat u k -tom retku.

Postoji li niz od 2008^2 poteza tako da figura prođe kroz sve jedinične kvadrate točno jednom i vrati se na početni položaj ?

3. zadatak: Neka je $ABCD$ trapez sa paralelnim stranama \overline{AB} i \overline{CD} takvima da je $|AB| > |CD|$. Točke K i L leže na \overline{AB} i \overline{CD} , redom, tako da je $|AK|/|KB| = |DL|/|LC|$. Neka su P i Q točke na \overline{KL} takve da je $\angle APB = \angle BCD$ i $\angle CQD = \angle ABC$.

Dokažite da točke P , Q , B i C leže na istoj kružnici.

4. zadatak: Nađite sve $x, y \in \mathbb{N}$ takve da $xy^2 + 2y$ dijeli $2x^2y + xy^2 + 8x$.

Vrijeme pisanja je 5 sati.

Svaki zadatak vrijedi 8 bodova.

MEMO vs IMO 2008, pripremno ekipno natjecanje

1. srpnja 2008.

1. zadatak: Neka su a_1, a_2, \dots, a_n pozitivni realni brojevi takvi da je $\prod_{i=1}^n a_i = 1$, te neka

je $A = \sum_{i=1}^n a_i$. Dokažite da je

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{A - a_i + 1} \leq 1.$$

2. zadatak: Mađioničar Melkior uz pomoć pomagača Adriana izvodi sljedeći trik: gledatelj zapiše na ploču niz od N znamenaka, a zatim Adrian prekrije crnim krugom dvije susjedne znamenke. Melkior ulazi i on treba pogoditi koje se dvije znamenke (i u kojem poretku) nalaze pod crnim krugom.

Za koje N se Melkior i Adrian mogu dogovoriti tako da Melkior može glumiti "veliku facu" (t.j. da su sigurni da trik uvijek funkcionira) ?

3. zadatak: Neka je $ABCD$ tetivni četverokut čiji su kutovi $\angle A$ i $\angle B$ različiti i šiljasti. Neka je P sjecište dijagonala, a T sjecište pravaca AD i BC . Ako je TP okomito na AB , onda je P ortocentar trokuta ABT . Dokažite !

4. zadatak: Nađite sve parove prirodnih brojeva (a, b) takve da $ab + a + b$ dijeli $a^2 + b^2 + 1$.

Vrijeme pisanja je 5 sati.

Svaki zadatak vrijedi 8 bodova.

MEMO 2008, pripremno pojedinačno natjecanje br.1

2. srpnja 2008.

- 1. zadatak:** Neka su a, b, c i d pozitivni realni brojevi takvi da je $ab + bc + cd + da = 1$. Dokaži da vrijedi

$$\frac{a^3}{b+c+d} + \frac{b^3}{c+d+a} + \frac{c^3}{d+a+b} + \frac{d^3}{a+b+c} \geq \frac{1}{3}.$$

- 2. zadatak:** n lampi L_1, \dots, L_n , poredanih u red, se pali i gasi svake sekunde po sljedećem pravilima:

- Ako su L_i i njegovi susjedi u istom stanju, onda se L_i gasi (ili ostaje ugašena),
- Ako nije tako, onda se L_i pali (ili ostaje upaljena)

Na početku, sve su lampe ugašene, osim prve lampe.

(a) Dokaži da postoji beskonačno mnogo brojeva n za koje će nakon nekog vremena sve lampe biti ugašene.

(b) Dokaži da postoji beskonačno mnogo brojeva n za koje sve lampe nikad neće biti ugašene.

- 3. zadatak:** Dana je dužina \overline{AB} i varijabilna točka M na njoj. Nad dužinama \overline{AM} i \overline{MB} konstruirani su kvadrati $AMCD$ i $MBEF$, a opisane kružnice tih kvadrata sijeku se osim u M i u točki N .

Dokaži da se pravci AF i BC sijeku se u N .

Dokaži da pravac MN prolazi čvrstom točkom ravnine (neovisnom o odabiru točke M).

Odredi geometrijsko mjesto polovišta dužina koje spajaju središta kvadrata.

- 4. zadatak:** Kažemo da je prirodan broj n *zanimljiv* ako iz tvrdnje da n dijeli $a^n - 1$ slijedi da n^2 dijeli $a^n - 1$. Dokaži:

- Svaki prost broj je zanimljiv.
- Postoji beskonačno mnogo zanimljivih složenih brojeva.

Vrijeme pisanja je 4.5 sati.

Svaki zadatak vrijedi 8 bodova.

MEMO 2008, pripremno pojedinačno natjecanje br.2

3. srpnja 2008.

1. zadatak: Odredi sve funkcije $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ za koje vrijedi

$$f(x^2 - y^2) = xf(x) - yf(y).$$

2. zadatak: Tablica $n \times n$, $n \geq 2$ je popunjena brojevima 1 i -1 . Kvadratić u i -tom retku i j -tom stupcu označavamo s (i, j) . Susjedi kvadratića (i, j) su kvadratići $(i, j - 1)$, $(i, j + 1)$, $(i - 1, j)$ i $(i + 1, j)$, pri čemu zbrajamo i oduzimamo modulo n .

U svakom koraku broj u svakom kvadratiću se zamjenjuje umnoškom brojeva u četiri susjedna kvadratića.

Nađi sve vrijednosti od n za koje iz proizvoljnog početnog stanja tablice u konačno mnogo koraka dobivamo tablicu popunjenu samo brojevima 1.

3. zadatak: Neka je ABC trokut. Kružnica koja prolazi kroz A i B siječe dužine \overline{AC} i \overline{BC} u D i E redom. Pravci AB i DE sijeku se u točki F , a pravci BD i CF u točki M . Dokaži da je $|MF| = |MC|$ ako i samo ako je $|MB| \cdot |MD| = |MC|^2$.

4. zadatak: Postoje li prirodni brojevi m i n takvi da je

$$\frac{n^2 + 4m}{4m - 1}$$

prirodan broj ?

Vrijeme pisanja je 4.5 sati.

Svaki zadatak vrijedi 8 bodova.

MEMO 2008, pripremno pojedinačno natjecanje br.3

srpanj, kolovoz 2008.

- 1. zadatak:** Odredi sve polinome P stupnja n koji imaju samo racionalne korijene, a skup njihovih koeficijenata je $\{0, 1, 2, \dots, n\}$.
- 2. zadatak:** Kvadrat dimenzija $(n - 1) \times (n - 1)$ je podijeljen na $(n - 1)^2$ jediničnih kvadrata. Svaki od n^2 vrhova obojan je crveno ili plavo. Odredi broj različitih bojanja takvih da svaki jedinični kvadrat ima točno dva crvena vrha.
- 3. zadatak:** Neka je A_1 središte kvadrata upisanog šiljastokutnom trokutu ABC sa dva vrha na stranici \overline{BC} (jedan od dva preostala vrha je na stranici \overline{AB} , a drugi je na \overline{AC}). Točke B_1 i C_1 su definirane na analogan način za upisane kvadrate s dva vrha na stranici \overline{AC} , odnosno \overline{AB} redom. Dokaži da se pravci AA_1 , BB_1 i CC_1 sijeku u jednoj točki.
- 4. zadatak:** Neka je k prirodan broj. Dokaži da postoji beskonačno mnogo potpunih kvadrata oblika $n \cdot 2^k - 7$, pri čemu je n prirodan broj.

Vrijeme pisanja je 4.5 sati.

Svaki zadatak vrijedi 8 bodova.

MEMO 2008, pripremno pojedinačno natjecanje br.4

srpanj, kolovoz 2008.

1. zadatak: Nađi najveći broj A takav da je

$$\frac{x}{\sqrt{y^2 + z^2}} + \frac{y}{\sqrt{z^2 + x^2}} + \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \geq A.$$

za sve pozitivne brojeve x, y, z .

2. zadatak: Odredi najmanji prirodni broj n , $n \geq 4$, za koji se između n različitih prirodnih brojeva mogu izabrati četiri, a, b, c i d takvi da je $a + b - c - d$ djeljivo sa 20.

3. zadatak: Zadan je tetivni četverokut $ABCD$ i kružnica sa središtem na stranici \overline{AB} , dok su ostale tri stranice tangente na tu kružnicu. Dokaži da vrijedi

$$|AD| + |BC| = |AB|.$$

4. zadatak: Neka je $d(n)$ broj pozitivnih djelitelja broja n .
Nađi sve prirodne brojeve n za koje je $d(n)^3 = 4n$.

Vrijeme pisanja je 4.5 sati.

Svaki zadatak vrijedi 8 bodova.